

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ $(\cos \phi - 1)_2$ И МАССИВНОЙ МОДЕЛИ ТИРРИНГА¹⁾

П. П. Кулиш, Е. Р. Нусимов

Доказано существование бесконечного числа законов сохранения в массивной модели Тирринга, когда $\psi_\alpha(x)$ — элементы грассмановой алгебры, и отсутствие аномалий у квантовых токов.

Для модели с лагранжианом $L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + m^2/\beta^2(\cos \beta\phi - 1)$ [1] и массивной модели Тирринга [2] в квантовой теории справедлив замечательный факт — сохранение после рассеяния набора импульсов частиц в начальном состоянии и факторизация S-матрицы [3], если при квантовании остаются справедливыми классические законы сохранения. Нами показано, что это действительно имеет место и приведены рекуррентные соотношения для вычисления сохраняющихся токов в модели Тирринга, когда поля $\psi_\alpha(x)$ являются не c-числами [2], а элементами грассмановой алгебры.

1. Локальные сохраняющиеся токи для уравнения синус-Гордон имеют простой вид в переменных $\tau = (t + x)/2$, $\sigma = (t - x)/2$ и вычисляются из рекуррентных соотношений

$$j_\tau^{(n+1)} = \phi_\tau \partial_\tau (j_\tau^{(n)} / \phi_\tau) + (\beta^2/4) \sum_{k+l=n} j_\tau^{(k)} j_\tau^{(l)} + \phi_\tau^2 \delta_{n,0}; \quad \phi_\tau \equiv \partial\phi/\partial\tau,$$

$$j_\sigma^{(n+1)} = -2m^2/\beta^2 \delta_{n,0} \cos \beta\phi + m^2/\beta (j_\tau^{(n)} / \phi_\tau) \sin \beta\phi; \quad \partial_\sigma j_\tau^{(n)} + \partial_\tau j_\sigma^{(n)} = 0.$$

Токи $j_\tau^{(n)}$ являются однородными функциями по ∂_τ степени $n+1$, поэтому, несмотря на суперренормируемость теории, функции Грина токов $j_\tau^{(n)}$ требуют перенормировки. Как было отмечено в [4] это может привести к аномалиям в тождествах Уорда (ТУ) и нарушению классических законов сохранения. Используя квантовые уравнения движения в формализме N-произведений [5] с эффективным лагранжианом [6] $L =$

$$= \frac{1}{2} : ((\partial_\mu \phi)^2 - m^2 \phi^2) : + : (\tilde{m}^2 / \beta^2 (\cos \beta\phi - 1) + m^2 / 2 \phi^2) :, \quad \tilde{m}^2 = m^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k \beta^{2k}$$

для тока $j_\tau^{(n)} (\partial_\sigma j_\tau^{(n)}) = \sum_{m=0}^{n-1} Y_m \partial_\tau^m (\phi_{\sigma\tau})$ получаем дифференциальные ТУ.

$$\langle N_{n+2} [\partial_\sigma j_\tau^{(n)}] (x) X \rangle = - \langle N_n [\partial_\tau j_\sigma^{(n)}] (x) X \rangle + m^2 \sum_{l=0}^{n-1} \langle N_n [Y_l (\partial_\tau^l \phi -$$

$$- \{\partial_\tau^l \phi\}] (x) X \rangle - i \sum_{j=1}^k \left(\sum_{l=0}^{n-1} \langle N_{n-l} [Y_l] (x) X \rangle \partial_\tau^l \right) \delta(x - y_j);$$

¹⁾ Результаты работы докладывались на IV Международном совещании по не-локальной квантовой теории поля, Алушта, апрель, 1976 г.

$$X = \prod_{j=1}^k \phi(y_j), \quad \hat{X} = \prod_{i \neq j} \phi(y_i).$$

где индекс a при знаке нормального произведения $N_a[B](x)$ определяет порядок вычитаний в подграфах, содержащих вершину, отвечающую оператору $B(x)$, а фигурные скобки — два сверхвычитания. Интегрируя по d^2x можно преобразовать интеграл от аномальных членов

$$\sum_{l=0}^{n-1} \int d^2x \langle N_n [Y_l (\partial_\tau^l \phi - \{\partial_\tau^l \phi\})](x) X \rangle = \sum_{l=1}^n \int d^2x \langle N_n [B_l(\phi - \{\phi\})](x) X \rangle.$$

Мономы B_l однородны по ∂_τ степени n и не меньше третьей степени по ϕ . Используя тождества Циммермана и квантовые уравнения движения получаем для аномальных членов неоднородную систему уравнений, определитель которой при достаточно малых β отличен от нуля. Неоднородные члены системы — швингеровские члены дифференциальных ТУ вида $\langle N_n [B_l](y_j) \hat{X} \rangle$. Таким образом в интегральных ТУ остаются только швингеровские члены и переходя на массовую поверхность в импульсном представлении получаем классические законы сохранения $\sum (p_j^{in})^n = \sum (p_j^{out})^n$; $n = 1, 2, \dots$

2. Уравнения движения массивной модели Тирринга

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = \lambda/2 \gamma^\mu \psi (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi),$$

когда $\psi_\alpha(x)$ — элементы грассмановой алгебры A с антикоммутирующими образующими $\psi_\alpha(x)$, $\psi_\alpha^*(x)$, $\alpha = 1, 2$, а — инволюция в A , тоже удобно рассматривать в переменных σ, τ . Сохраняющиеся токи вычисляются из рекуррентных соотношений ($\psi_\alpha^* \psi_\alpha = \rho_\alpha$)

$$b_{n+1} = \partial_\sigma b_n - i\lambda \rho_1 b_n - 2i\lambda \sum_{k+l=n, k \neq \sigma} b_k^* \psi_1 b_l + \psi_1 \delta_{n+1,0}; \quad b_n = 0, \quad n < 0,$$

зависимость b_n от τ определяется соотношениями

$$\partial_\tau b_{n+1} = -m^2 b_n - i\lambda \rho_2 b_{n+1} + 2\lambda m \sum_{k+l=n} b_k^* \psi_2 b_l, \quad n \geq 0,$$

а классические законы сохранения имеют вид

$$\partial_\tau (\psi_1^* b_n - h.c.) = im \partial_\sigma (\psi_2^* b_{n-1} + h.c.).$$

Используя квантовые уравнения движения с эффективным лагранжианом

$$L = i/2 (1+b) \bar{\psi} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu \psi - (m+a) \bar{\psi} \psi - (\lambda+c)/4 (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)^2,$$

где a, b, c — конечные перенормировки массы, волновой функции и за-

ряда, получаем дифференциальные ТУ для тока

$$\begin{aligned}
 & \langle N[\partial_r (\psi_1^* b_n - h.c.) - im/(1+b) \partial_\sigma (\{\psi_2^*\} b_{n-1} + h.c.)](x) X \rangle = \\
 & = \frac{m}{(1+b)^2} \langle N[m(\{\psi_1^*\} b_{n-1} - \psi_1^* \{b_{n-1}\}) + \psi_1^* A_n] + 2a(\{\psi_1^*\} b_{n-1} - \\
 & \quad - \psi_1^* \{b_{n-1}\} + \psi_1^* B_n)](x) X \rangle + \\
 & + \frac{(\lambda+c)m}{(1+b)^2} \langle N[\{\psi_2^* \rho_1\} b_{n-1} - \{\psi_2^*\} \rho_1 b_{n-1} + \psi_1^* C_n - h.c.](x) X \rangle + \dots;
 \end{aligned}$$

$$X = \prod_j \psi(x_j) \prod_i \bar{\psi}(y_i).$$

Операторы A_n , B_n , C_n вычисляются из рекуррентных соотношений, следующих из соотношений для b_n и уравнений движения, а каждая фигурная скобка соответствует одному сверхвычитанию. Многоточие означает опущенные швингеровские члены, которые в интегральном ТУ, после перехода на массовую поверхность, дают

$$(1+c(\lambda, m)) \left(\sum_{j=1}^m (p_j^{\text{out}})^n - \sum_{j=m+1}^l (p_j^{\text{in}})^n \right) \langle p_1, \dots, p_m; \text{out} | p_{m+1}, \dots, p_l; \text{in} \rangle.$$

Анализ аномальных членов в интегральных ТУ проводится с использованием тождеств Циммермана [5]. Однако, в отличие от уравнения синус-Гордон, массивная модель Тирринга является лишь перенормируемой теорией и явно вычислить аномальные члены не удастся. Тем не менее имеется целый ряд упрощений, связанных с фермионным характером поля $\psi_\alpha(x)$, лоренцевой ковариантностью и C -, P -инвариантностью, которые позволяют провести анализ аномальных членов до конца и показать, что они сводятся, как и в случае уравнения синус-Гордон, к соответствующим швингеровским членам. Таким образом, классические законы сохранения выполняются и в квантовой теории. Эквивалентность уравнения синус-Гордон и массивной модели Тирринга [7] позволяет утверждать, что и в солитонном секторе квантовой теории $(\cos \phi - 1)_2$ отсутствуют аномалии.

К моменту отправления работы в печать нам стали известны препринты [8], где приведены примеры сохраняющихся токов. Их выражения для $J_\mu^{(n)}$, $n = 3, 5, 7$ совпадают с токами, получающимися из рекуррентных соотношений.

В заключение выражаем благодарность Л.Д.Фаддееву, И.Я.Арефьевой и В.Е.Коренину за стимулирующие обсуждения.

Математический институт
им. В.Л.Стеклова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
28 июня 1976 г.

Литература

- [1] Л.А.Тахтаджян, Л.Д.Фаддеев. ТМФ, 21, 160, 1974.
- [2] А.В.Михайлов. Письма в ЖЭТФ, 23, 356, 1976.
- [3] П.П.Кулиш. ТМФ, 26, 198, 1976.
- [4] R.Flume. Preprint, DESY 75/33, 1975.
- [5] W.Zimmermann. Ann. Phys., 77, 536, 1973.
- [6] И.Я.Арефьева, В.Е.Корепин. Письма в ЖЭТФ, 20, 680, 1974.
- [7] S.Coleman. Phys. Rev., D11, 2088, 1975.
- [8] В.Berg, M.Karowski, H.Thun. Preprint, FUB/HEP, 76/5, 1976; R.Flume, P.Mitter, N.Papanikolaou. Preprint, CERN, 1976.

Письма в ЖЭТФ, том 24, вып. 4, стр. 250 – 253

20 августа 1976 г.

О ВЫСВЕЧИВАНИИ 2_2^+ УРОВНЕЙ В ЧЕТНО-ЧЕТНЫХ ЯДРАХ

С $60 < A < 150$ И $190 < A < 220$

А.М.Демидов, Л.И.Говор

Выдвинуто предположение о связи величины смеси и фазового соотношения $M1$ и $E2$ радиации в $2_2^+ - 2_1^+$ переходах с разностью степеней жесткости протонной и нейтронной системы в сферических четно-четных ядрах. Найдена корреляция отношения $B(E2, 2_2^+ \rightarrow 0_0^+)$: $B(E2, 2_2^+ - 2_1^+)$ с разностью энергий уровней $E(0_1^+) - E(2_2^+)$.

Высвечивание 2_2^+ уровней четно-четных "сферических" ядер рассматривалось во многих работах [1 – 3]. В последнее время данные о смеси $M1$ и $E2$ радиации $\delta = \pm \sqrt{E2/M1}$ табулированы Крейном [3, 4]. На рис. 1 приведены в зависимости от числа нейтронов значения $1/\delta$ в $2_2^+ - 2_1^+$ переходах рассматриваемых ядер. Дополнительно на этом рисунке показаны величины $1/\delta$ для $2_2^+ \rightarrow 2_1^+$ – переходов с гамма-вибрационных полос несферических ядер, которые мы здесь не рассматриваем. Значения $1/\delta$ для фиксированных Z соединены между собой линиями. Существенно отметить, что в принятом нами масштабе для $1/\delta$ наиболее характерные изменения, обусловлены не приведенной вероятностью перехода $B(E2)$, а $B(M1)$. Обращает на себя внимание для многих элементов систематическое изменение величины $1/\delta$ с N , что, по-видимому, говорит о коллективном (многочастичном) формировании не только электрического квадрупольного, но и магнитного дипольного матричного элемента $2_2^+ \rightarrow 2_1^+$ переходов вдали от магических чисел. Характер изменения величины $1/\delta$ и ее знака дает возможность выдвинуть